

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

COMPTABILITÉ ET GESTION DES ORGANISATIONS

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Session 2016

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

Matériel et documents autorisés :

Toutes les calculatrices de poche y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante (Circulaire n°99-186, 16/11/1999).

Documents à rendre avec la copie :

– Annexepage 6/6

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 6 pages, numérotées de 1/6 à 6/6.

BTS COMPTABILITE ET GESTION DES ORGANISATIONS		Session 2016
Épreuve de mathématiques	CGMAT	Page 1/6

EXERCICE 1 : (10 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A – Probabilités conditionnelles

Pour contacter une compagnie d'assurances, deux possibilités sont offertes :

- se rendre en agence ;
- à distance par téléphone.

Le responsable du pôle « satisfaction client » décide de réaliser une enquête afin de savoir si les clients que se rendent en agence ou qui contactent la compagnie par téléphone sont satisfaits de l'accueil.

À l'issue de l'enquête, réalisée auprès de 1 000 clients, les résultats sont les suivants :

- 380 se sont rendus en agence,
- parmi les clients qui se sont rendus en agence, 93 % se sont déclarés satisfaits de l'accueil,
- parmi les clients qui ont téléphoné, 15 % ont déclaré qu'ils n'étaient pas satisfaits de l'accueil.

On interroge au hasard un client.

On considère les événements suivants :

A : « Le client s'est rendu en agence »

S : « Le client est satisfait de l'accueil ».

On rappelle que l'événement contraire de A se note $\bar{A}$, que la probabilité de l'événement A se note $P(A)$ et que la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé se note $P_B(A)$.

Dans toute cette partie, les probabilités seront arrondies à 10^{-4} , si nécessaire.

1. Donner la valeur des probabilités $P(A)$, $P_A(S)$ et $P_{\bar{A}}(\bar{S})$.
2. L'arbre de probabilités donné en annexe à **rendre avec la copie** représente la situation. Compléter celui-ci.
3. Calculer la probabilité que le client se soit rendu en agence et qu'il ait été satisfait de l'accueil.
4. Montrer que la probabilité de S est 0,8804.
5. Le responsable a pour objectif qu'il y ait moins de 10 % des clients non satisfaits par l'accueil. Cet objectif est-il atteint ?
6. Sachant que le client a été satisfait, quelle est la probabilité qu'il se soit rendu en agence ?

Partie B – Loi normale

La compagnie d'assurances s'intéresse aux coûts des sinistres susceptibles de survenir en 2016 sur les véhicules qu'elle assure. On note X la variable aléatoire qui à chaque sinistre associe son coût en euros.

L'étude des années précédentes permet de supposer que X suit la loi normale d'espérance 1 200 et d'écart-type 200.

1. La compagnie estime que pour l'année 2016, elle devra faire face à 10 000 sinistres. À combien peut-elle estimer le coût de l'ensemble de ces sinistres.
2. Sans utiliser la calculatrice, expliquer pourquoi on peut estimer qu'environ 95 % des sinistres auront un coût compris entre 800 et 1 600 euros.
3. Par la méthode de votre choix, calculer $P(X > 1\,000)$.
Donner le résultat arrondi à 10^{-2} .
4. À l'aide de la calculatrice, estimer pour l'année 2016 le pourcentage de sinistres dont le coût sera compris entre 1 000 et 1 500 euros.

Partie C – Loi binomiale

Un employé prend au hasard 10 dossiers de sinistres de l'année en cours. Ce tirage est assimilé à un tirage avec remise car le nombre de dossiers est très grand.

On suppose que la probabilité que le coût du sinistre dépasse 1 000 euros est 0,84.

Soit Y la variable aléatoire qui, pour un lot de 10 dossiers pris au hasard, indique le nombre de dossiers du lot dont le coût est supérieur à 1 000 euros.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que dans le lot prélevé par l'employé, tous les dossiers aient un coût supérieur à 1 000 euros. Arrondir la probabilité à 10^{-3} .
3. Calculer la probabilité que l'employé obtienne dans le lot prélevé au moins six dossiers dont le coût est supérieur à 1 000 euros.
Arrondir la probabilité à 10^{-3} .

EXERCICE 2 (10 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Un formulaire est disponible en fin d'exercice.

Partie A – Étude d'une fonction

L'évolution de la population d'une ville entre le 1^{er} janvier 2015 et le 1^{er} janvier 2016 est modélisée à l'aide de la fonction f , définie sur $[0; 15]$ par

$$f(x) = \frac{40x}{x^2 + 25} + 15$$

Dans ce modèle, $f(x)$ est le nombre d'habitants de la ville en milliers et x le nombre d'années écoulées depuis le 1^{er} janvier 2015. Par exemple, $f(2)$ est une estimation du nombre d'habitants de la ville (en milliers) au 1^{er} janvier 2017.

1. Calculer le nombre d'habitants de la ville le 1^{er} janvier 2015.
2. On admet que la fonction f est dérivable et on désigne par f' sa fonction dérivée.
 - a) Montrer, en détaillant les calculs que, pour tout nombre réel x de $[0; 15]$,
$$f'(x) = \frac{-40(x-5)(x+5)}{(x^2+25)^2}.$$
 - b) Étudier le signe de $x - 5$ sur l'intervalle $[0; 15]$.
 - c) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0; 15]$, puis le tableau de variation complet de f sur $[0; 15]$.
3. En utilisant le modèle et les résultats obtenus précédemment, à quelle date la population de la ville sera-t-elle maximale et quel sera le nombre d'habitants ?

Partie B – Calcul intégral

On note $I = \int_0^5 f(x)dx$ où f est la fonction définie dans la partie A.

1. La fonction F est définie sur $[0; 15]$ par $F(x) = 20 \ln(x^2 + 25) + 15x$.
Démontrer que F est une primitive de f sur $[0; 15]$.
2. Sans calculatrice, montrer que $I = 20 \ln 2 + 75$, en précisant les étapes du calcul.
3. En déduire une estimation de la population moyenne de la ville entre le 1^{er} janvier 2015 et le 1^{er} janvier 2020. Arrondir cette estimation à la centaine d'habitants.

Partie C – Suites numériques

Dans cette ville, on compare l'évolution de la fréquentation de deux écoles A et B. En 2015, l'école A compte 310 élèves et l'école B en compte 280. On fait l'hypothèse que, chaque année, l'effectif de l'école A augmente de 10 élèves tandis que celui de l'école B augmente de 5 %.

1. Justifier que le nombre d'élèves de l'école B pour l'année 2015 + n peut être modélisé par une suite géométrique (b_n) dont on précisera la raison et le premier terme b_0 .

2. La capacité de l'école B est de 450 élèves.

L'école B pourra-t-elle accueillir tous les élèves prévus par le modèle en 2025 ?

3. La feuille de calcul en annexe présente les prévisions d'effectifs des deux écoles pour les années à venir. Les résultats y sont arrondis à l'unité.

Quelle formule peut-on écrire en C3 pour obtenir par recopie vers le bas les effectifs de l'école A ?

Compléter sur **l'annexe à rendre avec la copie** la colonne C avec les valeurs manquantes.

4. On considère l'algorithme ci-dessous.

- 1 Variables : N entier, A et B réels
- 2 Initialisation : N = 0, A = 310 et B = 280
- 3 Traitement : TANT QUE A ≥ B
- 4 affecter à N la valeur N + 1
- 5 affecter à B la valeur 1,05 * B
- 6 affecter à A la valeur A + 10
- 7 Fin TANT QUE
- 8 Sortie : Afficher N

Quelle est la valeur de N affichée à la sortie de cet algorithme ?

Que représente cette valeur de N dans le contexte de l'énoncé ?

Formulaire

Si u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I , v ne s'annulant pas sur I , alors la fonction $\frac{u}{v}$ est définie et dérivable sur I , et sa dérivée est donnée par :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Si u est une fonction strictement positive, définie et dérivable, sur un intervalle I , alors la fonction $(\ln u)$ est définie et dérivable sur I , et sa dérivée est donnée par :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

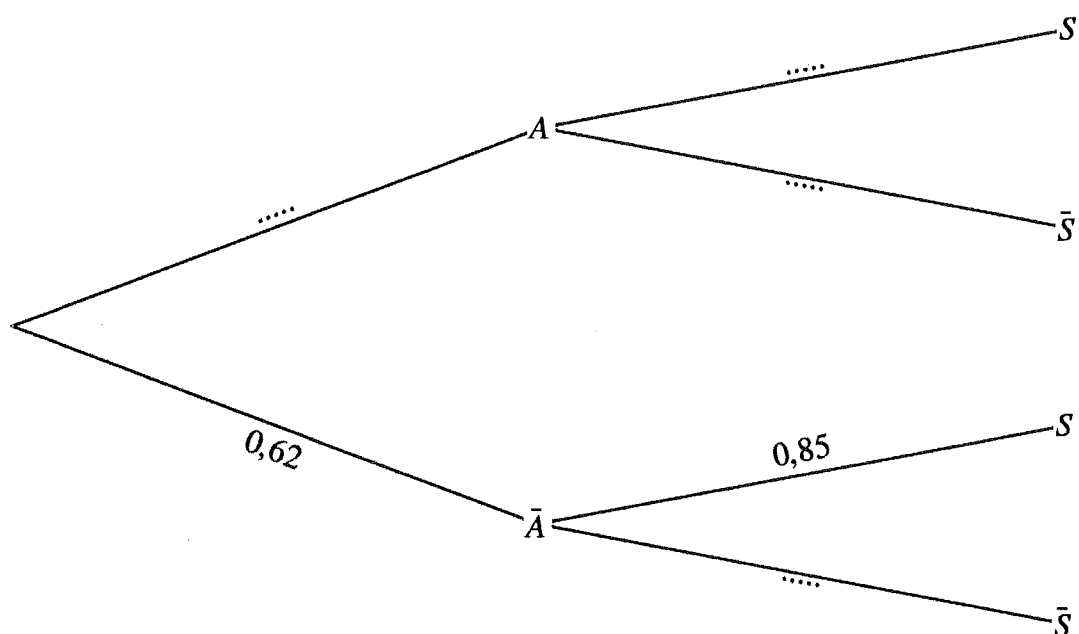
a et b étant deux nombres strictement positifs, on a : $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ (avec $a < b$) alors sa valeur moyenne sur $[a; b]$ est

$$\frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(t) dt$$

ANNEXE (À rendre avec la copie)

Exercice 1 – Partie A



Exercice 2 – Partie C

	A	B	C	D
1	Année	n	école A	école B
2	2015	0	310	280
3	2016	1		294
4	2017	2		309
5	2018	3		324
6	2019	4		340
7	2020	5		357
8	2021	6		375