∽ Corrigé du BTS - Comptabilité et gestion ∾
Métropole – 13 mai 2019

Exercice 1 — 9 points

L'entreprise SASSEMBON est spécialisée dans la fabrication de savons. Dans cet exercice, on s'intéresse aux différents défauts que peuvent présenter les savons.

Partie A : Défaut de forme

L'entreprise propose des savons senteur vanille ou noix de coco qui peuvent présenter des défauts de forme lors de la fabrication.

Après avoir réalisé une étude sur 200 savons, l'entreprise constate que :

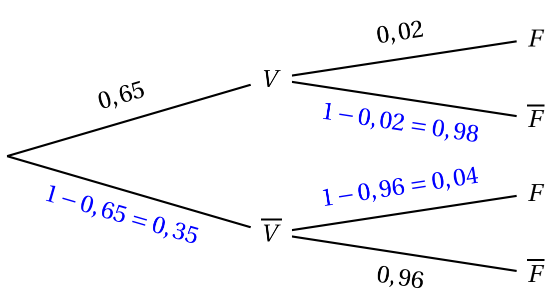
- 130 savons sont à la vanille,
- parmi les savons à la vanille, 2 % présentent un défaut de forme,
- parmi les savons à la noix de coco, 96 % ne présentent aucun défaut de forme.

On prend un savon au hasard.

On considère les évènements suivants :

- V : « le savon est à la vanille » ;
- F : « le savon présente un défaut de forme ».

1. - Sur 200 savons, 130 sont à la vanille donc $P(V) = \frac{130}{200} = 0,65$.
   - Parmi les savons à la vanille, 2 % présentent un défaut de forme donc $P_V(F) = 0,02$.
   - Parmi les savons à la noix de coco, 96 % ne présentent aucun défaut de forme donc $P_{\overline{V}}\left(\overline{F}\right) = 0,96$.
2. On réalise un arbre pondéré de probabilité représentant la situation.



3. « Le savon est à la noix de coco et présente un défaut de forme » est l'événement $\overline{V} \cap F$.
   $P\left(\overline{V} \cap F\right) = P\left(\overline{V}\right) \times P_{\overline{V}}(F) = 0,35 \times 0,04 = 0,014$.
4. La probabilité qu'un savon pris au hasard présente un défaut de forme est $P(F)$.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(F) = P(V \cap F) + P\left(\overline{V} \cap F\right) = 0,65 \times 0,02 + 0,014 = 0,027$.

5. Sachant que le savon présente un défaut de forme, la probabilité, arrondie au millième, qu'il soit à la vanille est : $P_F(V) = \dfrac{P(V \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0,65 \times 0,02}{0,027} \approx 0,481$.

Partie B : Défaut de masse

Pour être jugé conforme, un savon doit peser entre 98 et 102 g. On note X la variable aléatoire qui à chaque savon associe sa masse en grammes. On suppose que X suit la loi normale d'espérance 100 et d'écart type 1.

1. Pour fournir ses magasins, l'entreprise prépare des colis de 150 savons.
   La masse moyenne d'un savon est de 100 g, donc la masse moyenne d'un colis de 150 savons est, en grammes, de $150 \times 100 = 15\,000$, soit 15 kg.
2. **a.** À la calculatrice, on trouve : $P(X \leqslant 98) \approx 0,023$.
   b. La probabilité que la masse du savon soit inférieure à 98 g est de $0,023$.
3. La probabilité que le savon soit conforme est $P(98 \leqslant X \leqslant 102) \approx 0,95$.
   Donc la probabilité que le savon ne soit pas conforme est $1 - P(98 \leqslant X \leqslant 102) \approx 0,05$.

Partie C : Deux défauts

Chaque savon peut présenter deux défauts : un défaut de forme ou un défaut de masse. On prélève un savon au hasard dans le stock de l'entreprise.

On note :

- F : « le savon présente un défaut de forme » ;
- M : « le savon présente un défaut de masse ».

On sait que 2,7 % des savons présentent un défaut de forme et 4,6 % des savons présentent un défaut de masse. On suppose que ces deux évènements sont indépendants.

1. **a.** On sait que 2,7 % des savons présentent un défaut de forme donc $P(F) = 0,027$, et que 4,6 % des savons présentent un défaut de masse donc $P(M) = 0,046$.
   Les événements F et M sont indépendants donc $P(F \cap M) = P(F) \times P(M) = 0,027 \times 0,046 = 001\,242$, soit 0,0124 en arrondissant à 10^{-4}.·
   b. $P(F \cap M)$ représente la probabilité qu'un savon présente les deux défauts.
2. La probabilité que le savon présente au moins un des deux défauts est
   $P(F \cup M) = P(F) + P(M) - P(F \cap M) = 0,027 + 0,046 - 0,001\,242 \approx 0,0718$.
3. L'événement « le savon ne présente aucun défaut » est l'événement contraire de l'événement « le savon présente au moins un des deux défauts » ; donc sa probabilité est, arrondie à 10^{-4} :
   $1 - P(F \cup M) = 1 - 0,0718 = 0,9282$.

Exercice 2 — 11 points

Partie A : Achat d'un appartement

Un couple souhaite demander un emprunt afin d'acquérir un appartement d'une valeur de 140 000 €.

Une première banque leur propose un crédit de 140 000 € au taux mensuel de 0,12 % sur 180 mois remboursable par mensualités constantes.

1. La banque établit le tableau d'amortissement suivant où la cellule C1 est au format pourcentage :

	A	B	C	D	E
1		taux mensuel	0,12 %		
2					
3	Mois	Capital restant dû en début de mois	Intérêts du mois	Amortissement du capital	Mensualité constante
4	1	140 000,00			865,26
5	2				865,26
6	3				865,26
7	4				865,26

a.
- En cellule C4, on calcule la part d'intérêts mensuels donc on entre : `= B4 * $C$1`
- En cellule C5, on calcule la part d'amortissement donc on entre : `= E4 - C4`
- En cellule B5, on calcule le montant de ce qui reste à rembourser, donc on entre : `= B4 - D4`

b.
- $140\,000 \times \dfrac{0,12}{100} = 168$ donc on obtient 168 en C4.
- $865,26 - 168 = 697,26$ donc on obtient $697,26$ en D4.
- $140\,000 - 697,26 = 139\,302,74$ donc on obtient $139\,302,74$ en B5.

2. On paie 180 mensualités de 865,26 €, ce qui fait une dépense totale de $180 \times 865,26 = 155\,746,80$ €.
Le coût total du crédit est alors de $155\,746,80 - 140\,000 = 15\,746,80$ €.

Une seconde banque propose au couple des conditions plus avantageuses avec un emprunt de 140 000 € au taux annuel de 1,35 % sur 12 ans.

3. Le taux annuel de 1,35 % par an correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{1,35}{100} = 1,0135$.

Le coefficient multiplicateur mensuel est de $\sqrt[12]{1,0135} = 1,0135^{\frac{1}{12}} \approx 1,001\,118$, ce qui correspond à un taux moyen d'environ $100 \times (1,001\,118 - 1)$ c'est-à-dire environ 0,112 %.

4. La formule de calcul d'une mensualité m constante : $m = C \times \dfrac{t}{1-(1+t)^{-n}}$ où $C = 140\,000$ est le capital emprunté, $t = 0,00112$ le taux mensuel et $n = 12 \times 12 = 144$ est le nombre de mensualités.
Donc $m = 140\,000 \times \dfrac{0,00112}{1-(1+0,00112)^{-144}} \approx 1\,053,27$.
Sachant que le couple ne peut pas rembourser une mensualité supérieure à 1 000 € par mois, il ne va pas pouvoir souscrire cet emprunt.

Partie B : Assurance

Afin d'assurer son appartement, le couple compare deux propositions :
Proposition A : le montant de l'assurance est de 200 € la première année puis augmente de 10 € par an,
Proposition B : le montant de l'assurance est de 180 € la première année puis augmente de 6 % par an.
On note a_n le montant de l'assurance avec la proposition A et b_n celui avec la proposition B la n-ième année. Ainsi $a_1 = 200$ et $b_1 = 180$.

1. Étude de la proposition A.

a. $a_2 = a_1 + 10 = 200 + 10 = 210$ et $a_3 = a_2 + 10 = 210 + 10 = 220$

b. La suite (a_n) est arithmétique de premier terme $a_1 = 200$ et de raison $r = 10$.

c. Donc, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = a_1 + (n-1) \times r = 200 + 10(n-1) = 190 + 10n$

2. Étude de la proposition B.

a. $b_2 = b_1 \times \left(1 + \dfrac{6}{100}\right) = 180 \times 1,06 = 190,80$ et $b_3 = b_2 \times 1,06 = 190,80 \times 1,06 \approx 202,25$

b. Ajouter 6 %, c'est multiplier par $1 + \dfrac{6}{100}$ soit 1,06, donc la suite (b_n) est géométrique de raison $q = 1,06$ et de premier terme $b_1 = 180$.

c. On en déduit que, pour tout entier naturel n non nul, $b_n = b_1 \times q^{n-1} = 180 \times 1,06^{n-1}$.

3. Pour déterminer quelle est la proposition la plus avantageuse si le couple conserve son assurance pendant 10 ans, il faut calculer ce que coûte chaque assurance sur 10 ans.

- Proposition A
  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 10 \times \dfrac{a_1 + a_{10}}{2}$
  $a_{10} = 190 + 10 \times 10 = 290$ donc $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 10 \times \dfrac{200 + 290}{2} = 2\,450$
- Proposition B
  $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{10} = b_1 \times \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = 180 \times \dfrac{1 - 1,06^{10}}{1 - 1,06} \approx 2\,372,54$

Sur 10 ans, la proposition A coûte 2450 € et la proposition B coûte 2372,54 € ; la proposition B est donc la plus avantageuse.

Partie C : Location

Le couple envisage de louer son appartement dans quelques années. Il s'intéresse au montant mensuel des loyers dans sa région pour un appartement équivalent au sien.

Ces montants sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Année	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Rang : x_i	0	1	2	3	4	5
Loyer mensuel (en euros) : y_i	610	612	619	628	634	640

où x_i désigne le rang de l'année mesuré à partir de l'année 2012 et y_i le montant mensuel moyen du loyer (en euros) des appartements entre 2012 et 2017.

1. D'après la calculatrice, le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ arrondi au millième est $r = 0,991$ qui est très proche de 1 ; on peut donc envisager un ajustement affine.

2. D'après la calculatrice, l'équation de la droite de régression de y en x, avec les coefficients arrondis au centième, est : $y = 6,43x + 607,76$.

3. On décide d'ajuster le nuage de points de cette série $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ par la droite d'équation $y = 6,4x + 608$.

a. L'année 2020 correspond à $x = 8$; pour $x = 8$, on $y = 6,4 \times 8 + 608 = 659,2$.
En 2020, le couple peut espérer un loyer mensuel de 659,20 €.

b. Le couple peut espérer louer son appartement plus de 700 € quand on aura x tel que $y > 700$. On résout cette inéquation.
$y > 700 \iff 6,4x + 608 > 700 \iff 6,4x > 92 \iff x > \dfrac{92}{6,4} \iff x > 14,375$
Cela correspond à $x = 15$ donc à l'année 2027.