

~ Corrigé du brevet de technicien supérieur Métropole ~
septembre 2020 - Comptabilité et gestion ¹

A. P. M. E. P.

Exercice 1

10 points

Partie A :

Une entreprise, spécialisée dans la fabrication de parfums, souhaite créer deux parfums, l'un à la rose et l'autre au jasmin.

Elle achète donc les deux variétés de fleurs à deux producteurs, A et B, pour ses créations.

Le directeur passe la commande suivante :

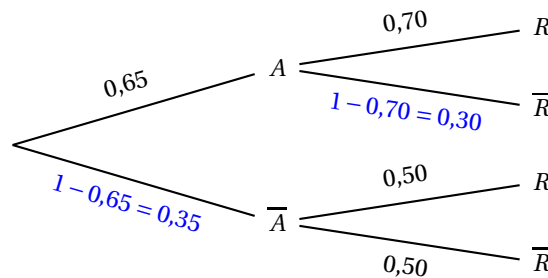
- 65 % de la quantité nécessaire provient du producteur A ;
- parmi la quantité provenant du producteur A, 70 % sont des roses ;
- parmi la quantité provenant du producteur B, il y a autant de roses que de jasmin.

On s'intéresse à une fleur au hasard.

On considère les événements suivants :

- A : « La fleur provient du producteur A » ;
- B : « La fleur provient du producteur B » ;
- R : « La fleur est une rose ».

1. L'événement B est l'événement $\bar{A}$. On donne la valeur des probabilités $P(A)$, $P_A(R)$ et $P_{\bar{A}}(R)$.
 - 65 % de la quantité nécessaire provient du producteur A donc $P(A) = 0,65$.
 - Parmi la quantité provenant du producteur A, 70 % sont des roses donc $P_A(R) = 0,70$.
 - Parmi la quantité provenant du producteur B, il y a autant de roses que de jasmin donc $P_{\bar{A}}(R) = P_{\bar{A}}(\bar{R}) = 0,50$.
2. On réalise un arbre de probabilités représentant la situation.



3. La probabilité que la fleur provienne du producteur A et soit une rose est :

$$P(A \cap R) = P(A) \times P_A(R) = 0,65 \times 0,70 = 0,455.$$
4. Le directeur a besoin d'au moins 60 % de roses pour ses créations ; on calcule $P(R)$:

$$P(R) = P(A \cap R) + P(\bar{A} \cap R) = 0,455 + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(R) = 0,455 + 0,35 \times 0,50 = 0,63 \text{ c'est-à-dire } 63 \%.$$

Donc la commande du directeur peut convenir.
5. Sachant que la fleur est une rose, la probabilité qu'elle provienne du producteur A est :

$$P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{0,455}{0,63} \approx 0,722.$$

Partie B :

Un employé prend au hasard 100 flacons parmi les parfums à la rose ou au jasmin. Ce tirage est assimilé à un tirage avec remise car le nombre de flacons est très grand.

On suppose que la probabilité que le flacon contienne du jasmin est de 0,37.

Soit X la variable aléatoire qui, dans le lot de 100 flacons, associe le nombre de flacons contenant du jasmin.

1.
 - L'épreuve élémentaire consiste à prendre au hasard un flacon de parfum; cette épreuve a deux issues : le flacon contient du jasmin avec une probabilité $p = 0,37$ ou le flacon ne contient pas de jasmin.

- On effectue dans les mêmes conditions cette épreuve 100 fois.

Donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de flacons contenant du jasmin suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,37$.

2. La probabilité d'obtenir dans le lot exactement 40 flacons contenant du jasmin est :

$$P(X = 40) = \binom{100}{40} 0,37^{40} (1 - 0,37)^{100-40} \approx 0,067$$

3. La probabilité d'obtenir au moins 30 flacons contenant du jasmin est : $P(X \geq 30) \approx 0,942$.

Partie C :

L'entreprise s'intéresse au remplissage de ses flacons de parfum.

On note Y la variable aléatoire qui, à chaque flacon prélevé dans la production, associe la quantité de parfum qu'il contient, exprimée en mL.

On admet que Y suit la loi normale d'espérance 50 et d'écart-type 0,4.

1. La probabilité que le flacon contienne moins de 49 mL de parfum est : $P(0 \leq Y < 49) \approx 0,0062$.
2. On estime qu'un flacon de parfum est conforme lorsque la quantité de parfum qu'il contient est comprise entre 49 et 51 mL.
 - a. La probabilité que le flacon soit non conforme est :

$$1 - P(49 \leq Y \leq 51) \approx 1 - 0,9876 \approx 0,0124.$$
 - b. L'entreprise a produit 120 000 flacons. On estime que 1,2 % des flacons ne sont pas conformes.
Le nombre de flacons non conformes est : $120\,000 \times \frac{1,2}{100} = 1\,440$.
 - c. Un flacon est vendu 30 € ; $1\,440 \times 30 = 43\,200$.
Donc la perte de chiffre d'affaires pour l'entreprise peut être estimée à 43 200 €.

Exercice 2 :**10 points**

Dans ce problème, on s'intéresse au taux d'équipement des ménages en connexion internet.

Le tableau suivant, où x_i désigne le rang de l'année mesuré à partir de l'année 2010, donne le taux d'équipement en connexion internet y_i (en pourcentage) des ménages pour chaque année entre 2011 et 2016.

Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Rang x_i	1	2	3	4	5	6
Taux (en %) d'équipement en connexion internet y_i	69,2	73	75,3	77,9	79,7	81,7

Source : Insee

Partie A : Premier modèle

1. Le taux global d'évolution du taux d'équipement en connexion internet des ménages entre 2011 (69,2 %) et 2016 (81,7 %), exprimé en pourcentage est : $\frac{81,7 - 69,2}{69,2} \times 100 \approx 18,06\%$.

2. On veut calculer le taux moyen annuel d'évolution du taux d'équipement en connexion internet des ménages entre 2011 et 2016, exprimé en pourcentage et arrondi à 0,01

Le coefficient multiplicateur qui fait passer du taux en 2011 au taux en 2016 est $1 + \frac{18,06}{100} = 1,1806$. Entre 2011 et 2016 il y a 5 ans donc le coefficient multiplicateur moyen qui fait passer du taux en 2011 au taux en 2016 est $\sqrt[5]{1,1806} = (1,1806)^{\frac{1}{5}} \approx 1,0338$, ce qui correspond à une augmentation annuelle moyenne de 3,38 %.

3. Entre 2016 et 2020 il y a 4 ans.

On suppose que le taux d'équipement en connexion internet des ménages augmente annuellement de 3,4 % depuis 2016, ce qui correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \frac{3,4}{100} = 1,034$.

Ce taux d'équipement, exprimé en pourcentage et arrondi à 0,1 %, en 2020 est :

$$81,7 \times 1,034^4 \approx 93,4\%.$$

Partie B : Deuxième modèle

On suppose que le taux d'équipement en connexion internet des ménages augmente chaque année de 2,5 % à partir de 2016 après avoir constaté cette augmentation entre 2015 et 2016.

On note u_n le taux d'équipement en connexion internet des ménages pour l'année 2016 + n .

Ainsi $u_0 = 81,7$.

1. $u_1 = u_0 + \frac{2,5}{100} \times u_0 = 81,7 + \frac{2,5}{100} \times 81,7 \approx 83,7$.

On peut donc estimer que le taux d'équipement en connexion internet des ménages en 2017 est d'environ 83,7 %.

2. Augmenter de 2,5 % c'est multiplier par $1 + \frac{2,5}{100} = 1,025$, donc la suite (u_n) est géométrique de raison $r = 1,025$.

3. La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 81,7$ et de raison $r = 1,025$ donc, pour tout n , on a : $u_n = u_0 + n \times r = 81,7 + 1,025n$.

4. Le rang 0 correspond à l'année 2016, donc l'année 2020 correspond au rang 4.

Le taux d'équipement en connexion internet des ménages en 2020 est donc

$$u_4 = 81,7 + 1,025 \times 4 \text{ soit } 85,8\%.$$

5. On considère l'algorithme ci-dessous.

$N \leftarrow 2016$
$U \leftarrow 81,7$
Tant que $U < 92$
$N \leftarrow N + 1$
$U \leftarrow 1,025 \times U$
Fin tant que

La valeur de N affichée à la sortie de cet algorithme est 2021.

Cette valeur représente l'année à partir de laquelle le taux d'équipement en connexion internet des ménages dépasse 92 %.

Partie C : Troisième modèle

À partir des données du tableau fourni au début de l'énoncé :

1. Le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique $(x_i ; y_i)$ donné par la calculatrice et arrondi à 0,001 près, est 0,992.
Le coefficient de corrélation linéaire r est très proche de 1, donc on peut envisager un ajustement affine de cette série statistique.
2. L'équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés donnée par la calculatrice, avec des coefficients arrondis au centième est : $y = 2,42x + 67,67$.
3. On décide d'ajuster ce nuage de points par la droite D d'équation $y = 2,4x + 67,6$.
 - a. L'année 2011 correspond à $x = 1$ donc l'année 2020 correspond à $x = 10$.
À l'aide de ce modèle, une estimation du taux d'équipement en connexion internet des ménages en 2020 est $2,4 \times 10 + 67,6 = 91,6$ soit 91,6%.
 - b. Selon ce modèle, pour la première fois, le taux d'équipement en connexion internet des ménages dépassera 95 % pour x entier tel que $2,4x + 67,6 > 95$ soit pour $x = 12$ donc pour l'année 2022.

Partie D : Conclusion

Ces trois modèles ont le même inconvénient : au bout d'un certain nombre d'années, le taux d'équipement va dépasser 100 %.

- 1^{er} modèle
 $81,7 \times 1,034^6 \approx 99,8$ et $81,7 \times 1,034^7 \approx 103,2$ donc à partir de $2016 + 7$ soit 2023, le taux dépasse 100 %.
- 2^e modèle
 $u_8 = 81,7 \times 1,025^8 \approx 99,5$ et $u_9 = 81,7 \times 1,025^9 \approx 102$ donc à partir de $2016 + 9$ soit 2025, le taux dépasse 100 %.
- 3^e modèle
Pour $x = 13$, $y = 2,4 \times 13 + 67,6 = 98,9$, et pour $x = 14$, $y = 2,4 \times 14 + 67,6 = 101,2$, donc à partir de $2011 + 14$ soit 2025, le taux dépasse 100 %.

Aucun de ces trois modèles ne peut convenir à long terme.